Matroides Representables

Miguel Moreno

Mayo 2010

Conjuntos independientes

Definición

Una matroide M es un par ordenado (E, I), $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(E)$, tal que:

- *E es un conjunto finito,*
- *$\emptyset \in \mathcal{I}$,*
- *Si $I_1 \in \mathcal{I}$ y $I_2 \subset I_1$, entonces $I_2 \in \mathcal{I}$,*
- *Si $I_1 \in \mathcal{I}$, $I_2 \in \mathcal{I}$ y $|I_1| < |I_2|$, entonces existe $e \in I_2 - I_1$ tal que $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.*

El conjunto de independientes se denotara como $\mathcal{I}$.

Conjuntos independientes

En la década de los 30 el matemático Hassler Whitney logro abstraer la noción de conjunto independiente que se encontraba en distintas áreas como espacios vectoriales, teoría de grafos, entre otras. Inicialmente Whitney propuso dos axiomas, aunque en trabajos posteriores se vio la necesidad de incluir un tercer axioma de independencia.

Conjuntos independientes

Ejemplo

Matroides vectoriales.

Con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

se puede construir una matroide, E el conjunto de las columnas, $I \in \mathcal{I}$ si I es un conjunto linealmente independiente.

Bases y Circuitos

Definición

- *En una matroide M, un elemento maximal independiente es una base de M.*
- *A es un circuito de una matroide M, si $A \notin \mathcal{I}$ y para todo $x \in A$ se tiene $A - \{x\} \in \mathcal{I}$.*

El conjunto de las bases de una matroide M se denotara por $B(M)$.

La Función Rango y el Operador Clausura

Definición

- *Dada una matroide M, se define la función rango como*

$$R : \mathcal{P}(E(M)) \to \mathbb{Z}$$

$$R(X) = max\{n \in \mathbb{Z} : n = |I|, I \subseteq X, I \in \mathcal{I}\}.$$

- *Dada una matroide M, se define la clausura de $X \subseteq E(M)$ por la siguiente igualdad*

$$cl(X) = \{x \in E(M) : R(X \cup \{x\}) = R(X)\}.$$

La Generadores, hiperplanos y conjuntos cerrados

Definición

- *En una matroide M, X es un conjunto cerrado de M, si $cl(X) = X$.*
- *En una matroide M, un conjunto X es un hiperplano de M, si es un conjunto cerrado y $R(X) = R(M) - 1$.*
- *En una matroide M, un conjunto X es un generador de M, si $cl(X) = M$.*

Matroide Dual

Teorema

En una matroide M el conjunto

$$B^*(M) = \{X \subseteq E(M) : E(M) \backslash X, X \in B(M)\}.$$

es el conjunto de las bases para alguna matroide.

Definición

En una matroide M, se define su matroide dual M^* como la matroide cuyas bases son los elementos de $B^*(M)$.

Restricción de una matroide

Definición

- *Dada una matroide M y un conjunto X, se define la restricción de M por X como $M|X = (X, \mathcal{I}|X)$, donde*

$$\mathcal{I}|X = \{I \subseteq X : I \in \mathcal{I}\}$$

- *El borrar X de M, es $M \backslash X = (E(M) \backslash X, A)$, donde*

$$A = \{I \in \mathcal{I} : I \cap X = \emptyset\}.$$

Teorema

Para una matroide M y un conjunto $X \subseteq E(M)$,

$$M \backslash X = M|(E(M) \backslash X).$$

Contracción de una matroide

Definición

Dada una matroide M y un conjunto X, se define la contracción de M por X como $M/X = (E(M)\backslash X, A)$,

$$A = \{I \in \mathcal{I} : I \cup X \in \mathcal{I}\}.$$

Teorema

Para una matroide M y un conjunto $X \subseteq E(M)$,

$$M/X = (M^{*}\backslash X)^{*}.$$

Contracción de una matroide

Ejemplo

Matroides graficas.

E es el conjunto de aristas, $I \in \mathcal{I}$ si I no contiene circuitos.

Menores de una matroide

Teorema

Si $X \cap Y = \emptyset$, *entonces* $(M \backslash X)/Y = (M/Y) \backslash X$.

Definición

La matroide N *es un menor de la matroide* M *si existen conjuntos disjuntos* X, Y *tales que* $N = (M \backslash X)/Y$.

Suma directa de matroides

Definición

Para matroides M y N con conjuntos soporte E_M y E_N disjuntos se define la suma directa como

$$M \oplus N = (E_M \cup E_N, \{I_1 \cup I_2 : I_1 \in \mathcal{I}_M, I_2 \in \mathcal{I}_N\}).$$

Teorema

Si M, N son matroides con conjuntos soporte distintos, entonces $M \oplus N$ es una matroide.

Matroides Representables

Definición

- *La matroide M es representable sobre el campo $\mathbb{F}$, si existe una matriz A, con entradas en $\mathbb{F}$ tal que la matroide vectorial generada por A es M.*

Teoremas

Teorema

1. *Si M y N son representables sobre $\mathbb{F}$, entonces:*
   - $M \backslash X$ *es representable sobre $\mathbb{F}$, para todo X.*
   - M^* *es representable sobre $\mathbb{F}$.*
   - M/X *es representable sobre $\mathbb{F}$, para todo X.*
   - $M \oplus N$ *es representable sobre $\mathbb{F}$.*
2. *M es representable sobre $\mathbb{F}$, si y solo si, todo menor N de M es representable sobre $\mathbb{F}$.*

Matroides uniformes

Definición

La matroide $U_{r,n}$ es la matroide donde $E(U_{r,n}) = n$ y $X \in B(U_{r,n})$, si y solo si, $|X| = r$, esta matroide se llama matroide uniforme de rango r y tamaño n.

Teorema

La matroide $U_{2,n}$ es representable en $\mathbb{F}$, si y solo si, $|\mathbb{F}| \geq n - 1$.

Las matroides Fano y no-Fano

Representación de F_7 y F_7^-

Teorema

- *F_7 es representable en el campo $\mathbb{F}$, si y solo si, $\mathbb{F}$ tiene característica dos.*
- *F_7^- es representable sobre un campo $\mathbb{F}$, si y solo si, $\mathbb{F}$ tiene característica distinta de dos.*
- *$F_7^- \oplus F_7$ no es representable en ningún campo.*

$GF(2)$

Teorema

M no es representable en $GF(2)$, si y solo si, tiene un menor isomorfo a $U_{2,4}$.

$GF(3)$

Teorema

M no es representable en $GF(3)$, si y solo si, tiene un menor isomorfo a alguna de las siguientes matroides

- $U_{2,5}$.
- $U_{3,5}$.
- F_7.
- F_7^*.

Referencias

- Matroid Theory, James Oxley.
- Aspectos combinatorios de las subdivisiones matroidales, Edgar Rincón.
- Notas de clase: Matroid Theory, San Francisco State University y Universidad de los Andes 2007, Federico Ardila.
- The excluded minors for $GF(4)-$representable matroids.