The final version of this thesis was lost due to software problems. This is an old version of the thesis, recovered by an e-mail. It is not the final version and may contain mistakes.

Matroides Respresentables

Miguel Moreno
Director: Humberto Sarria

16 de junio de 2010

Introducción

En los años 30's el matemático Estadounidense Hassler Whitney, trabajando en Teoría de Grafos, logró abstraer la noción de independencia, que se puede encontrar en espacios vectoriales y teoría de grafos entre otros; en sus primeros trabajos propuso dos axiomas, mas tarde vio la necesidad de incluir un tercero, creando de esta manera la Teoría de Matroides. Con esto se generó una nueva forma de estudiar la noción de independencia en teorías particulares, a partir de los resultados generales que se obtienen en la Teoría de matroides.
Con este trabajo se pretende mostrar las nociones básicas de la Teoría de Matroides, haciendo énfasis en los distintos tipos de matroides, los cuales se distinguen por sus representaciones, y dar unas caracterizaciones parciales de las matroides representables, las cuales son, por lo general, el ejemplo ideal para explicar la teoría de Matroides. El estudio de este tipo de matroides ha generado muchas preguntas, la principal de ellas es, ¿cuáles matroides son representables en un campo $\mathbb{F}$?, ¿cuál es la caracterización de este tipo de matroides?. La forma en la que se da una respuesta a este problema es a través de los menores excluidos, al identificar los menores excluidos quedan identificadas las matroides representables, esta forma de resolver el problema generó más preguntas y conjeturas, entre ellas la conjetura de Rota, El número de menores excluidos en un campo finitos es finito, dada una matroide M, ¿como se puede saber todos los campos en los cuales es representable?, ¿en qué campos es representable la matroide $U_{r,n}$?
En la primera sección, se presentan las nociones de matroide y sus propiedades. En la segunda sección, se muestran ejemplos de matroides, los tipos de matroides más conocidos, dada la noción de matroides representables, se muestran los teoremas básicos y un procedimiento para hallar la representación de una matroide representable. En la tercera sección, se trata el problema de representación de matroides en los campos $GF(2)$ y $GF(3)$.

1. Preliminares

En esta sección se presentarán nociones básicas de la Teoría de Matroides. Las demostraciones de los resultados clásicos de la Teoría de Matroides, se pueden encontrar en [1], [2] o en [3]. Los ejemplos de matroides se harán en la sección 2.

1.1. Conjuntos independientes

Definición 1.1 Una *matroide* M es un par ordenado (E, I), con $I \subseteq \mathcal{P}(E)$, tal que:

(I-1) $\emptyset \in I$,

(I-2) Si $I_1 \in I$ y $I_2 \subset I_1$, entonces $I_2 \in I$,

(I-3) Si $I_1 \in I$, $I_2 \in I$ y $|I_1| < |I_2|$, entonces existe e en $I_2 - I_1$ tal que $I_1 \cup \{e\} \in I$.

El conjunto soporte E de M se denotará como $E(M)$ y el conjunto de independientes se denotará como $I(M)$, los elementos de $I(M)$ se denominarán *independientes* de M.
Se trabajará con matroides cuyo *conjunto soporte* E es finito.
Dos matroides M y N son *isomorfas*, si existe una función

$$f : E(M) \to E(N),$$

biyectiva, tal que X es independiente en M, si y sólo si, $f(X)$ es independiente en N.

1.2. Bases

Por el axioma I-3, se puede ver que un independiente puede aumentar su tamaño a partir de otro independiente con mayor tamaño. El conjunto $I(M)$ tiene un orden parcial inducido por $\subseteq$. Es natural preguntarse por las propiedades de los conjuntos maximales independientes, éstos nos guiarán hacia la definición de base de un matroide.

Definición 1.2 En una matroide M, un elemento maximal independiente es una *base* de M.

Proposición 1.3 Si B_1 y B_2 son bases de M, entonces $|B_1| = |B_2|$.

Proposición 1.4 $B \subseteq \mathcal{P}(E)$ es el conjunto de todas las bases para alguna matroide M, si y sólo si, $B \neq \emptyset$ y cumple alguna de las siguientes propiedades, para todo par $B_1, B_2 \in B$.

(B-1) Para todo $x \in B_1$, existe $y \in B_2$ tal que $(B_1 - \{x\}) \cup \{y\} \in B$. Además si $B_1 \subseteq B_2$ entonces $B_1 = B_2$,

RECOVERED FILE
NOT FINAL VERSION
CONTAIN MISTAKES

(B-2) Para todo $x \in B_2$, existe $y \in B_1$ tal que $(B_1 - \{y\}) \cup \{x\} \in B$. Además si $B_1 \subseteq B_2$ entonces $B_1 = B_2$.

El conjunto de las bases de una matroide M se denotará por $B(M)$.

Proposición 1.5 Si para un par de matroides M_1 y M_2 se tiene $B(M_1) = B(M_2)$ y $E(M_1) = E(M_2)$, entonces $M_1 = M_2$.

Nota: Si $B(M)$ es un conjunto que satisface B-1 y B-2 entonces,

$$I(M) = \{X \subseteq E(M) : \text{existe } B \in B(M), X \subseteq B\}.$$

1.3. Circuitos

Los subconjuntos de E que no son independientes, se denominan elementos *dependientes* de M.

Definición 1.6 A es un *circuito* de una matroide M, si $A \notin I(M)$ y para todo $x \in A$, $A - \{x\} \in I$.

Observemos que un circuito es un elemento minimal dependiente.
El conjunto de los circuitos de una matroide M se denotará por $C(M)$.

Proposición 1.7 Un conjunto $C \subseteq \mathcal{P}(E)$ es el conjunto de los circuitos de una matroide M, si y sólo si,

(C-1) $\emptyset \in C$,

(C-2) Si $C_1, C_2 \in C$ y $C_1 \subseteq C_2$, entonces $C_1 = C_2$,

(C-3) Si $C_1, C_2 \in C$ y $C_1 \neq C_2$, entonces si $x \in C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, existe $C_3 \in C$ único, tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - \{x\}$.

Proposición 1.8 Si para un par matroides M_1 y M_2, $C(M_1) = C(M_2)$ y $E(M_1) = E(M_2)$, entonces $M_1 = M_2$.

Proposición 1.9 Sean M una matroide, y $a \in E(M)$ y $B \in B(M)$ tales que $a \notin B$, entonces existe un único $C \in C(M)$ tal que $C \subseteq \{a\} \cup B$.

Los circuitos conformados por un elemento los llamaremos bucles y los conformados por dos elementos los llamaremos clases paralelas. Estos dos tipos de circuitos serán de capital importancia en el estudio de la representación de matroides como veremos posteriormente.

1.4. La Función Rango

Como vimos en las secciones anteriores, la noción de base e independencia tienen una interpretación más amplia en la Teoría de Matroides, de manera similar podemos desarrollar una noción de dimensión.

Definición 1.10 Dada una matroide M, la función *rango* de M es la función

$$R : \mathcal{P}(E(M)) \to \mathbb{Z}$$

definida por

$$R(X) = max\{n \in \mathbb{Z} : n = |I|, I \subseteq X, I \in I(M)\}.$$

Proposición 1.11 Una función $R : E \to \mathbb{Z}$ es la función rango de una matroide M, si y sólo si, R satisface las propiedades (1) o (2) siguientes.

(1) *a*) $0 \leq R(X) \leq |X|$, para todo $X \subseteq E$.

b) Si $X \subseteq Y \subseteq E$, entonces $R(X) \leq R(Y)$.

c) Si $X, Y \subseteq E$, entonces $R(X \cup Y) + R(X \cap Y) \leq R(X) + R(Y)$.

(2) *a*) $R(\emptyset) = 0$,

b) Si $X \subseteq E$ y $x \in E$, entonces $R(X) \leq R(X \cup x) \leq R(X) + 1$,

c) Si $X \subseteq E$ y $x, y \in E$ tal que $R(X) = R(X \cup \{x\}) = R(X \cup \{y\})$, entonces $R(X) = R(X \cup \{x\} \cup \{y\})$.

Definición 1.12 Llamaremos rango de un matroide M al valor $R(E(M))$. Este valor también lo denotaremos por $R(M)$.

Proposición 1.13 $R(X) = |X|$ si y sólo si $X \in I(M)$.

1.5. Operador Clausura

Definición 1.14 Dada una matroide M, se define la *clausura* de un conjunto $X \subseteq E(M)$ como el conjunto

$$cl(X) = \{x \in E(M) : R(X \cup \{x\}) = R(X)\}.$$

Proposición 1.15 Un operador $cl : E \to E$ es el operador clausura de un matroide M, si y sólo si, cl satisface

Cl-1 Si $X \subseteq E$, entonces $X \subseteq cl(X)$,

Cl-2 Si $X \subseteq Y \subseteq E$, entonces $cl(X) \subseteq cl(Y)$,

Cl-3 Si $X \subseteq E$, entonces $cl(cl(X)) = cl(X)$,

Cl-4 Si $X \subseteq E$, $x \in E$ y $y \in cl(X \cup \{x\}) - cl(X)$, entonces $x \in cl(X \cup \{y\})$.

Nota: Es fácil de ver que, si $y \in cl(X)$, entonces $cl(X \cup \{y\}) = cl(X)$. De ésto se deduce que $R(X) = R(cl(X))$.

1.6. Generadores, hiperplanos y conjuntos cerrados

Ya definimos las nociones de independencia, base, circuitos y clausura, con estos conceptos definiremos las nociones de generadores, hiperplano y conjunto cerrado.

Definición 1.16 En una matroide $M = (E, I)$. Un subconjunto $X \subseteq E$ es un *conjunto cerrado* de M, si $cl(X) = X$.

Si X es un conjunto cerrado, como $R(X) = R(cl(X))$, se tiene $R(X \cup \{y\}) = R(X) + 1$, para todo $y \notin X$.

Definición 1.17 En una matroide M, un conjunto X es un *hiperplano* de M, si es un conjunto cerrado y $R(X) = R(M) - 1$.

En un espacio vectorial V, si A es una base se tiene $gen(A) = V$, definiremos ahora una noción similar para matroides.

Definición 1.18 En una matroide M, un conjunto X es un *generador* de M, si $cl(X) = M$.

RECOVERED FILE
NOT FINAL VERSION
CONTAIN MISTAKES

1.7. Matroide Dual

En esta sección se darán algunos métodos para obtener una matroide a partir de otras ya dadas.
En una matroide M, ya se han mostrado varios conjuntos particulares que son interesantes. Al considerar los conjuntos de la forma $E(M) - I$ donde $I \in I(M)$, se puede pensar en las matroides que se pueden obtener a partir de estos conjuntos, en otras palabras, las matroides N para las cuales $B(N) \subseteq \{X \subseteq E(M) :$ existe $I \in I(M), X = E(M) - I\}$. En particular se trabajarán con la menor de estas matroides, la mayor de éstas es la matroide cuya única base es $E(M)$, esta matroide es $\mathcal{P}(E(M))$.

Proposición 1.19 En una matroide M, el conjunto

$$B^*(M) = \{X \subseteq E(M) : E(M)\backslash X \in B(M)\}.$$

es el conjunto de las bases para alguna matroide.

Definición 1.20 Dada una matroide M, se define su *matroide dual* M^* como la matroide cuyas bases son los elementos de $B^*(M)$.

Nótese que $(M^*)^* = M$.

Proposición 1.21 Para una matroide M, se tienen las siguientes equivalencias:

1. X es independiente en M, si y sólo si, $E(M) - X$ es un generador de M^*.
2. X es un generador en M, si y sólo si, $E(M) - X$ es un independiente de M^*.
3. X es un hiperplano en M, si y sólo si, $E(M) - X$ es un circuito de M^*.
4. X es un circuito en M, si y sólo si, $E(M) - X$ es un hiperplano de M^*.

La proposición 1.21, será muy útil en la demostración de algunos teoremas de representabilidad de matroides que presentaremos en la seccion 3.

1.8. Restricción de una matroide

El operador de clausura, permite obtener una matroide a partir de la clausura de un conjunto, cambiando el conjunto soporte por $cl(X)$ y los independientes por $I(M) \cap \mathcal{P}(cl(X))$, lo cual permite determinar la función rango de la matroide. Esta observación conduce a la siguiente definición.

Definición 1.22 Dada una matroide M y un conjunto X, se define la *restricción de M a X* como el par $M|X = (X, I|X)$, donde

$$I|X = \{I \subseteq X : I \in I(M)\}.$$

Proposición 1.23 Si M es una matroide y $X \subseteq E(M)$, entonces $M|X$ es una matroide.

Definición 1.24 La *eliminación* de X de M, es el par $M\backslash X = (E(M)\backslash X, A)$, donde

$$A = \{I \in I(M) : I \cap X = \emptyset\}.$$

Proposición 1.25 Si $X \subseteq E(M)$, $M\backslash X$ es una matroide.

Proposición 1.26 Para una matroide M y un conjunto $X \subseteq E(M)$,

$$M\backslash X = M|E(M)\backslash X.$$

1.9. Contracción de una matroide

La restricción de una matroide no es la única matroide que se puede definir en el conjunto $E(M) - X$, para un conjunto X dado.

Definición 1.27 Dada una matroide M y un conjunto X, se define la *contracción de X por M* como el par $M/X = (E(M)\backslash X, A)$, donde.

$$A = \{I \subseteq E(M)\backslash X : I \in I(M) \wedge I \cup X \in I(M)\}.$$

Proposición 1.28 Para una matroide M y un conjunto $X \subseteq E(M)$, M/X es una matroide.

Proposición 1.29 Para una matroide M y un conjunto $X \subseteq E(M)$,

$$M/X = (M^* \backslash X)^*.$$

la Proposición 1.29, será de gran utilidad para demostrar que si un matroide es representable sobre un campo $\mathbb{F}$, entonces cualquier contracción desde el matroide también lo es (Ver corolario 2.8).

1.10. Menores de una matroide

Ya se mostraron dos operaciones que se pueden efectuar sobre una matroide; la restricción y la contracción. En el siguiente teorema se muestra como se relacionan estas dos operaciones.

Proposición 1.30 Si $X \cap Y = \emptyset$, entonces $(M\backslash X)/Y = (M/Y)\backslash X$.

Definición 1.31 Una matroide N es un *menor* de una matroide M, si existen conjuntos disjuntos X, Y tales que $N = (M\backslash X)/Y$.
Nótese que M es menor de M, pues $M = M/\emptyset\backslash\emptyset$.

1.11. Suma directa de matroides

Aparte de las matroides que se pueden obtener de una matroide dada, usando operaciones como la restricción o la contracción, también se pueden construir nuevas matroides a partir de dos matroides dadas.

Definición 1.32 Sean N y M matroides dadas, con conjuntos soporte disjuntos. Se define la *suma directa* de M y N como el par

$$M \oplus N = \{(E(N) \cup E(M), I_1 \cup I_2) : I_1 \in I(M), I_2 \in I(N)\}.$$

Proposición 1.33 Si M, N son matroides con conjuntos soporte distintos, entonces $M \oplus N$ es una matroide.

RECOVERED FILE NOT FINAL VERSION CONTAIN MISTAKES

2. Matroides representables

Esta sección tiene como objetivo, presentar algunos ejemplos de matroides representables, dichos ejemplos nos servirán en la sección 3 para caracterizar las matroides representables sobre los campos finitos $GF(2)$ y $GF(3)$.

2.1. Matroides vectoriales

Hasta el momento, se ha dicho que los espacios vectoriales y las matroides tienen mucho en común, a continuación se mostrará el porqué de esta afirmación.
En un espacio vectorial de dimensión finita con base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, todo vector w, se puede representar como $n-$tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = w$. A partir de esta representación se pueden construir las *matroides vectoriales* tal como indica el siguiente resultado.

Proposición 2.1 Dada una matriz A, la pareja ordenada (C, I), donde C es el conjunto de columnas de A y los elementos de I son los subconjuntos de C linealmente independientes, es una matroide. Esta matroide la denotaremos por $M(A)$

En una *matroide vectorial*, todo elemento de $E(M)$ es representado por una columna de la matriz A.

2.2. Matroides gráficas

Dado un grafo $G = (V, A)$, donde V es el conjunto de vértices y A el conjunto de aristas. Se puede obtener una matroide a partir de este grafo, tomando los independientes como los subconjuntos X de A, que no contienen circuitos. Esta matroide la denotamos por $M(G)$.

Proposición 2.2 Dado un grafo (V, A), la pareja ordenada (A, I), donde I es el conjunto descrito anteriormente, es una matroide.

Proposición 2.3 El conjunto de circuitos de (A, I) es el conjunto de circuitos de (V, A).

Diremos que una matroide M es *gráfica*, si existe un grafo $G = (V, A)$ tal que M es isomorfa a $M(G)$.

Ejemplo 2.4 En este ejemplo se mostrará una matroide gráfica y una contracción de dicha matroide.

RECOVERED FILE NOT FINAL VERSION CONTAIN MISTAKES

En el grafo con representación matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

se denotarán las aristas de la siguiente manera: $a := \{1,2\}$, $b := \{1,4\}$, $c := \{2,4\}$, $d := \{3,4\}$ y $e := \{2,3\}$(Ver figura 2.1).

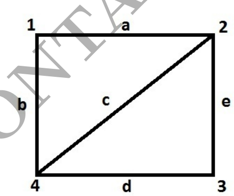


Figura 2.1

De este grafo se obtiene la matroide M con,
$B(M) = \{\{a,b,d\},\{a,b,e\},\{a,c,d\},\{a,c,e\},\{a,e,d\},\{c,b,d\},\{c,b,e\},\{e,b,d\}\}$.
Consideremos la matroide $M/\{c\}$, la cual tiene como base todo $I \in I(M)$, tal que $I \cup \{c\} \in I(M)$. De aquí se tiene $R(I) \leq 2$, $R(M/\{c\}) = 2$; $B(M/\{c\}) = \{\{a,d\},\{a,e\},\{b,d\},\{b,e\}\}$, esta matroide también es gráfica, pues el grafo con representación matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

es isomorfa a $M/\{c\}$.

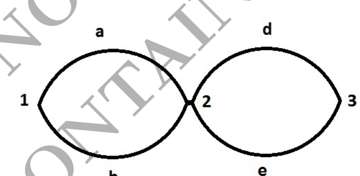


Figura 2.2

2.3. Matroides representables

Diremos que la matroide M es *representable* sobre el campo $\mathbb{F}$, si existe una matriz A, con entradas en $\mathbb{F}$ tal que la matroide generada por A es isomorfa a M.

Proposición 2.5 Toda matroide vectorial es una matroide representable.

Nota: Si M es una matroide con un bucle $\{a\}$ y una clase paralela $\{b, c\}$, M es representable , si y sólo si, $M \backslash \{a, c\}$ es representable, ya que si A representa a $M \backslash \{a, c\}$, entonces la matriz $\begin{bmatrix} A & \bar{0} & c_b \end{bmatrix}$ representa a M.
En adelante, asumiremos que las matroides que estudiaremos no tienen bucles, ni clases paralelas.

Proposición 2.6 Toda matroide gráfica es representable sobre cualquier campo.
Sea M una matroide gráfica, generada por G, al darle dirección a todas las aristas, se obtiene un digrafo $\vec{G}$. Con este digrafo se genera una matriz A, tal que A tiene $|E(M)|$ columnas, cada una representa un elemento de $E(M)$, y además tiene $|V(\vec{G})|$ filas, cada una de las cuales representa un vértice de $\vec{G}$. Tomamos $a_{v_i,e_j} = 0$, si la arista e_j no sale ni llega al vértice v_i, y $a_{v_i,e_j} = 1$ si la arista e_j sale del vértice v_i y $a_{v_i,e_j} = -1$, si la arista e_j llega al vértice v_i. Si M' la matroide generada por A, es fácil ver que $C(M) = C(M')$ y por la proposición 1.8 se tiene $M' \cong M$.

Proposición 2.7 Si M es representable, entonces M^* es representable.

Es fácil ver que, si M es representable, entonces $M \backslash X$ también es representable. De aquí, si $M \oplus N$ es representable en $\mathbb{F}$, entonces M y N son representables en $\mathbb{F}$.

Corolario 2.8 Si M es representable sobre $\mathbb{F}$, entonces M/X es representable sobre $\mathbb{F}$.

Corolario 2.9 M es representable sobre $\mathbb{F}$, si y sólo si, todo menor N de M es representable sobre $\mathbb{F}$.

En el capítulo 3 estudiaremos la representabilidad de una matroide investigando si sus menores son representables.

2.4. Construcción de una matriz de representación

Si la matriz B se obtiene de la matriz A a partir del intercambio de columnas o filas, entonces las matroides que generan son isomorfas.
Si se usan operaciones elementales para efectuar combinaciones lineales entre las filas de A, se obtiene una matriz B que genera una matroide isomorfa a la generada por A.
Dada una matriz A que genera una matroide M de rango r, podemos asumir

que las primeras r columnas de A son linealmente independientes. Si operamos las filas e intercambiamos columnas de modo tal que se obtenga una matriz $B = \begin{pmatrix} I_r & B_1 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$. Por las observaciones anteriores, B y A generan matroides isomorfas, ya que $B_2 = 0$.
Por lo anterior, si M es una matroide representable en un campo $\mathbb{F}$, entonces existe una matriz $B = \begin{pmatrix} I_r & B_1 \end{pmatrix}$ que genera a M. Si dada una matroide M, tal que se puede construir la matriz B_1, M será representable.
Si $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ son las columnas de B, por el Proposición 1.9 existe un único circuito C_i tal que $C_i \subseteq \{c_1, c_2, \ldots, c_r, c_i\}$ para $r < i$. La matriz $D(B)$ es la matriz de tamaño $r \times n$ cuya entrada (j, i) es 0, si $c_j \notin C_i$ y (j, i) es 1, si $c_j \in C_i$. Es sencillo probar que, si las matrices $B = \begin{pmatrix} I_r & B_1 \end{pmatrix}$ y $B' = \begin{pmatrix} I_r & B_1' \end{pmatrix}$ representan matroides isomorfas y el isomorfismo es la identidad, se tiene $D(B) = D(B')$. Esta matriz la notaremos por $D(M_{\mathcal{B}})$, donde $\mathcal{B}$ es la base representada por las matriz I_r. A continuación se mostrará un método con el cual se puede construir la matriz B, a partir de la matriz $D(M_{\mathcal{B}})$, si la matroide M es representable en $\mathbb{F}$. Nótese que para toda matroide M, la matriz $D(M_{\mathcal{B}})$ siempre existe, y ésta es fácil de construir a partir de una base $\mathcal{B}$ de M.

Construcción de B

A partir de la matriz $D(M_{\mathcal{B}})$ se construye el grafo $G(D(M_{\mathcal{B}}))$, el cual tiene vértices $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ y aristas $\{c_j, c_i\}$, si la entrada (j, i) es uno en $D(M_{\mathcal{B}})$. Siendo $\mathcal{B}'$ una base de la matroide generada por $G(D(M_{\mathcal{B}}))$, se hace la matriz B_1 con entrada iguales a cero en (j, i) si $D(M_{\mathcal{B}})$ tiene un cero en la entrada (j, i), un uno en la entrada (j, i) si $\{c_j, c_i\} \in \mathcal{B}'$, el resto de entradas de B_1 son incógnitas.
Nótese que una matriz A de tamaño $r \times r$, cuyas columnas son las columnas de $\begin{pmatrix} I_r & B_1 \end{pmatrix}$, tiene determinante cero o distinto de cero dependiendo de si las columnas de A son una base de M, cada determinante es igual a cero (una ecuación) o distinto de cero (una inecuación), por lo que al sacar los determinantes de todas las posibles matrices A se obtiene un sistema de ecuaciones, este sistema de ecuaciones tiene solución en el cuerpo $\mathbb{F}$, si y sólo si, M es representable en $\mathbb{F}$.

Ejemplo 2.10 La matroide $U_{r,n}$ es la matroide donde $E(U_{r,n}) = n$ y $X \in B(U_{r,n})$, si y sólo si, $|X| = r$. Esta matroide se llama matroide uniforme de rango r y tamaño n.
Se mostrará que la matroide $U_{2,n}$ es representable en $\mathbb{F}$, si y sólo si, $|\mathbb{F}| \geq n - 1$. Si $|\mathbb{F}| \geq n - 1$ la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

genera una matroide isomorfa a $U_{2,n}$, por lo que será representable en $\mathbb{F}$.

Si $U_{2,n}$ es representable en $\mathbb{F}$, es fácil ver que, si $n = 2$ se tiene $|\mathbb{F}| > 1 = n - 1$;

RECOVERED FILE NOT FINAL VERSION CONTAIN MISTAKES

si $n > 2$ se sabe que

$$D((U_{2,n})_{\{0,1\}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

el grafo bipartito $G(D((U_{2,n})_{\{0,1\}}))$ es $\{\{c_j, c_i\} : j \in \{0,1\}\ i > 1\}$, de donde $\{\{c_j, c_i\} : j = 0\ i > 1\} \cup \{c_2, c_3\}$ es una base de este grafo, y por tanto toda matriz que represente a M, se puede llevar a la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Nótese que, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_j & x_i \end{pmatrix},$$

$0 \neq |A| = x_i - x_j$, y los $x_{i's}$ son distintos. Por otra parte, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x_i \end{pmatrix},$$

$0 \neq |A| = x_i$, y los $x_{i's}$ son distintos de cero. Por último, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x_i \end{pmatrix},$$

$0 \neq |A| = x_i - 1$, y los $x_{i's}$ son distintos de uno, por lo que $\{0, 1, x_1, x_2, \ldots, x_n - 2\} \subseteq \mathbb{F}$. $|\mathbb{F}| \geq n - 1$.

Detalles del método

En la descripción que se hizo del método de construcción, se mostró que si $B = \begin{pmatrix} I_r & B_1 \end{pmatrix}$ y $B' = \begin{pmatrix} I_r & B_1' \end{pmatrix}$ representan matroides isomorfas y el isomorfismo es la identidad, se tiene $D(B) = D(B')$; nótese que $B = \begin{pmatrix} I_r & B_1 \end{pmatrix}$ y $B' = \begin{pmatrix} I_r & B_1' \end{pmatrix}$ pueden representar matroides isomorfas y el isomorfismo puede ser distinto de la identidad, por lo que no se puede asegurar que $D(B) = D(B')$. Este hecho se puede ver de la siguiente manera, al cambiar la base con la cual se construyó la matriz B, entonces la matriz $D(B)$ puede cambiar.

Por otra parte todos los pasos que se llevan a cabo en el método están justificados a excepción de asegurar que, si

$$B = \begin{pmatrix} I_r & B_1 \end{pmatrix},$$

existe una matriz B_2', que tiene entradas iguales a uno en las entradas que corresponden a los elementos de alguna base de la matroide que genera $G(D(M)_{\mathcal{B}})$ y

$$B_2 = \begin{pmatrix} I_r & B_2 \end{pmatrix}$$

generan matroides isomorfas, esto se asegura con la siguiente proposición.

RECOVERED FILE
NOT FINAL VERSION
CONTAIN MISTAKES

Proposición 2.11 Sea

$$B = \begin{pmatrix} I_r & B_1 \end{pmatrix}$$

una representación de una matroide M en el cuerpo $\mathbb{F}$, para toda base $\{b_1, b_2, \ldots, b_l\}$ de $G(D((B_1))_{\mathcal{B}})$ y toda $l-$tupla ordenada $(a_1, a_2, \ldots, a_l)$, con $a_i \neq 0$, existe una matriz B_2 tal que la entrada correspondiente a b_i es a_i y

$$B' = \begin{pmatrix} I_r & B_2 \end{pmatrix}$$

genera una matroide isomorfa a la generada por B.

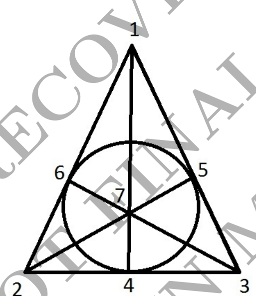
Con esto se concluye que, dada una representación B de una matroide M, existe una representación $B' = \begin{pmatrix} I_r & B_2 \end{pmatrix}$ de M, donde B_2 se obtiene aplicando el método descrito anteriormente.

2.5. Representación de algunas matroides importantes

Existen dos matroides F_7 y F_7^- las cuales tienen representación en campos muy particulares.
Ambas matroides tienen el mismo conjunto soporte, este es

$$E(F_7) = E(F_7^-) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

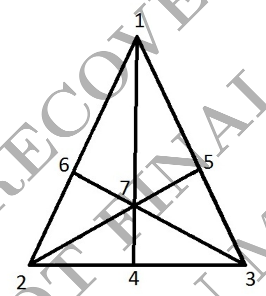
ambas matroides tienen rango tres y no tienen clases paralelas, se diferencian únicamente en una base. Para describir estas matroides, se mostrará cuales son sus circuitos de tres elementos; esta descripción es completa, pues de esa información se obtiene $B(M)$, la cual es única para cada matroide.
Los circuitos de tres elementos de F_7 son $\{1, 6, 2\}$, $\{1, 5, 3\}$, $\{1, 7, 4\}$, $\{2, 4, 3\}$, $\{2, 7, 5\}$, $\{3, 7, 6\}$ y $\{4, 5, 6\}$.



F_7

Los circuitos de tres elementos de F_7 son $\{1, 6, 2\}$, $\{1, 5, 3\}$, $\{1, 7, 4\}$, $\{2, 4, 3\}$, $\{2, 7, 5\}$ y $\{3, 7, 6\}$.

RECOVERED FILE
NOT FINAL VERSION
CONTAIN MISTAKES



F_7^-

la única diferencia en estas dos matroides es el circuito $\{4,5,6\}$.

Es fácil ver que, si se elije la base $\{1,2,3\}$, se obtiene

$$D((F_7)_{\{1,2,3\}}) = D((F_7^-)_{\{1,2,3\}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposición 2.12 F_7 es representable en el campo $\mathbb{F}$, si y sólo si, $\mathbb{F}$ tiene característica dos.
Prueba
Es fácil ver que los circuitos $\{1,5,3\}$, $\{1,6,2\}$, $\{2,4,3\}$, $\{2,7,5\}$, $\{1,7,4\}$ y $\{3,7,6\}$, son conjuntos de columnas linealmente dependiente de $\begin{pmatrix} I_3 & D((F_7)_{\{1,2,3\}}) \end{pmatrix}$, ahora, si $\mathbb{F}$ tiene característica 2, entonces las columnas 4, 5, 6 forman un conjunto linealmente dependiente y esos son los únicos conjuntos linealmente dependientes de $\begin{pmatrix} I_3 & D((F_7)_{\{1,2,3\}}) \end{pmatrix}$, esta matriz representa a F_7, si $\mathbb{F}$ tiene característica 2.

Para mostrar que, si F_7 es representable en $\mathbb{F}$, entonces $\mathbb{F}$ tiene característica dos, procedemos usando el método descrito anteriormente.
Al obtener $G(D((F_7)_{\{1,2,3\}}))$ se tiene que $\{\{c_2,c_4\},\{c_1,c_5\},\{c_1,c_6\},\{c_1,c_7\},\{c_2,c_7\},\{c_3,c_7\}\}$ es una base de la matroide gráfica de este grafo bipartito. Según el método, toda representación se puede llevar a la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c & 1 \\ a & b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $\{1,7,4\}$ es circuito, se tiene que la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

debe tener determinante cero, $1*(1*1-1*a)=0$, de donde $1-a=0$, $a=1$. Por otra parte $\{2,7,5\}$ es un circuito, se tiene que la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

debe tener determinante cero, $1*(1*1-1*b)=0$, de donde $1-b=0$, $b=1$. Por último $\{3,7,6\}$ es un circuito, se tiene que la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & c & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

debe tener determinante cero, $1*(1*1-1*c)=0$, de donde $1-c=0$, $c=1$. Como toda representación en $\mathbb{F}$ se puede llevar a la forma $\begin{pmatrix} I_3 & D((F_7)_{\{1,2,3\}}) \end{pmatrix}$ y $\{4,5,6\}$ es circuito, entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene determinante cero, esto es $-1*(1*0-1*1)+1*(1*1-1*0)=0$, $1+1=0$. $\mathbb{F}$ tiene característica dos.

Corolario 2.13 F_7^- es representable sobre un campo $\mathbb{F}$, si y sólo si, $\mathbb{F}$ tiene característica distinta de dos.
Prueba
En la Proposición 2.12 se mostró que toda representación en $\mathbb{F}$ se puede llevar a la forma $\begin{pmatrix} I_3 & D(F_7) \end{pmatrix}$ usando los circuitos $\{1,7,4\}$, $\{2,7,5\}$ y $\{3,7,6\}$ que son también circuitos de F_7^- y como $D((F_7)_{\{1,2,3\}}) = D((F_7^-)_{\{1,2,3\}})$ se concluye que toda representación se puede llevar a la forma $\begin{pmatrix} I_3 & D((F_7)_{\{1,2,3\}}) \end{pmatrix}$. A diferencia de la Proposición 2.12, en F_7^-, $\{4,5,6\}$ es base por lo que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene determinante distinto de cero, esto es $-1*(1*0-1*1)+1*(1*1-1*0) \neq 0$, $1+1 \neq 0$. $\mathbb{F}$ tiene característica distinta de dos.

Corolario 2.14 Existen matroides que no son representables en ningún campo.
Prueba
La matroide $M = F_7 \oplus F_7^-$ es una de estas matroides. Supongamos que existe un campo $\mathbb{F}$ en el cual M es representable. Se tendrá que F_7^- es representable en $\mathbb{F}$, por el corolario 2.13 $\mathbb{F}$ tiene característica distinta de dos, de donde F_7 no es representable, pero F_7 es un menor de M lo cual contradice el Corolario 2.9.

Se puede ver que todo menor propio de F_7 es representable en un campo de característica distinta de dos.

RECOVERED FILE NOT FINAL VERSION CONTAIN MISTAKES

3. $GF(2)$ y $GF(3)$

Por el Corolario 2.9, una matroide es representable, si y sólo si, todos sus menores son representables. Esta es una forma de caracterizar las matroides que son representables en un campo, existen matroides como F_7, que no son representables en un campo $\mathbb{F}$ pero todos sus menores propios sí lo son, las matroides con esta propiedad se denominan los *menores excluidos* del campo $\mathbb{F}$.
La forma de caracterizar la representación de matroides en un campo es: *M es representable en $\mathbb{F}$, si y sólo si, no tiene menores isomorfos a los menores excluidos de $\mathbb{F}$.*
El matemático Rota conjeturó que el número de menores excluidos es finito en un campo finito.

Las demostraciones de los teoremas 3.3 y 3.7 son las mismas demostraciones que aparecen en Matroid Theory, James Oxley, pero hechas en detalle.

3.1. Lo Menores excluidos de $GF(2)$

Antes de mostrar cuáles son los menores excluidos de $GF(2)$, se mostrará una caracterización diferente que ayudará a mostrar cuáles son los menores excluidos.

Proposición 3.1 *M es representable en $GF(2)$, si y sólo si, para todo par de conjuntos $C \in C(M)$ y $C^* \in C(M^*)$ se cumple que $|C \cap C^*|$ es par.*

Proposición 3.2 *Si en la matroide M existen $C \in C(M)$ y $C^* \in C(M^*)$, tales que $C \cap C^* \neq \emptyset$, entonces existe una matroide N, que es un menor de M y $C \cap C^*$ es circuito generador de N y N^*.*

Teorema 3.3 *M no es representable en $GF(2)$, si y sólo si, tiene un menor isomorfo a $U_{2,4}$.*
Demostración
Usando el Ejemplo 2.9, como $2 < 3$, entonces $U_{2,4}$ no es representable en $GF(2)$ al igual que cualquier matroide que tenga un menor isomorfo a él.

Sea M una matroide no representable en $GF(2)$, por el Corolario 2.9 existe una matroide N, la cual es un menor de M que no es representable en $GF(2)$ y es un menor excluido de $GF(2)$. Por la proposición 3.1 existen $C \in C(N)$ y $C^* \in C(N^*)$ con $|C \cap C^*| = |X|$ impar, de aquí $X \neq \emptyset$. Por la proposición 3.2, existe una matroide N_1 menor de N tal que X es un circuito generador de N_1 y N_1^*. Como $X \in C(N_1)$, $X \in C(N_1^*)$ y $|X| = |X \cap X|$ es impar, por la proposición 3.1, N_1 no es representable en $GF(2)$, como N es un menor excluido de $GF(2)$ se tiene $N = N_1$.
Al ser X circuito y generador de N^*, entonces $E(N) - X$ es un independiente y un hiperplano de N, por ser X circuito de N, $R(X) = |X| - 1$ y como también es generador de N, $R(N) = R(X) = |X| - 1$. Siendo H_0 el hiperplano $E(N) - X$ se tiene $R(H_0) = R(N) - 1 = |X| - 2$, como $|X|$ es impar se tiene $|H_0| > 0$,

por esto $H_0 - y \neq \emptyset$ para todo $y \in H_0$. Al ser H_0 un independiente, $H_0 - y$ es también independiente. Por las propiedades de la clausura $H_0 - y \subset H_0$, entonces $cl(H_0 - y) \subsetneq cl(H_0) = H_0$, por lo que $cl(H_0 - y) = H_0 - y$, $H_0 - y$ es un conjunto cerrado.
Sean $H_0, H_2, \ldots, H_m$ los hiperplanos que contiene a $H_0 - y$. Sea $x \in X$, $x \in H_i$ y $x \in H_j$, por la definición de H_0 se tiene que $i, j \neq 0$, como $(H_0 - y) \cup x \subset H_i$ y $(H_0 - y) \cup x \subset H_j$ entonces

$$cl((H_0 - y) \cup x) \subseteq cl(H_i) = H_i$$

$$cl((H_0 - y) \cup x) \subseteq cl(H_j) = H_j$$

como $H_0 - y$ es un flat, se tiene

$$R((H_0 - y) \cup x) = R(H_0) = R(H_i) = R(H_j)$$

de donde

$$H_i \subseteq cl((H_0 - y) \cup x)$$

y

$$H_j \subseteq cl((H_0 - y) \cup x).$$

Por lo que $H_i = cl((H_0 - y) \cup x) = H_j$, $i = j$. De lo anterior y dado que para todo $x \in X$ el conjunto $cl((H_0 - y) \cup x)$ es un hiperplano, se tiene que $\{H_1, H_2, \ldots, H_m\}$ es una partición de X.
Si $X \subset H_i$, se tendría $cl(X) \subseteq cl(H_i)$, como X es generador y H_i es hiperplano, y así $E(N) \subseteq H_i$, lo cual es una contradicción, de donde $X \subsetneq X \cap H_i$. Por la definición de H_0, $X \cap H_i \neq \emptyset$, de lo anterior se tiene que H_i parte en dos a X, de donde $(E(N) - H_i) \cap X \neq \emptyset$ y es intersección del circuito X y por ser H_i un hiperplano, $(E(N) - H_i) \in C(N^*)$, por la proposición 3.2, existe una matroide N_2 menor de N, tal que $(E(N) - H_i) \cap X$ es un generador y un circuito de N_2 y de N_2^*.
Como H_i divide en dos a X, entonces $|(E(N) - H_i) \cap X| < |X|$ y $|(E(N) - H_i) \cap X|$ es par, de lo contrario, por la proposición 3.1, N_2 no sería representable en $GF(2)$, pero como es un menor de N y N es un menor excluido, se tendría $N = N_2$, pero como H_i parte en dos a X, $(E(N) - H_i) \cap X$ es circuito e independiente de N, lo cual no puede pasar.
Por lo anterior y dado que X es impar, se obtiene que $|X \cap H_i|$ es impar y $\bigcup_{i=1}^{m}(X \cap H_i) = X$, $|X| = \sum_{i=1}^{m} |x \cap H_i|$, como es suma de impares, m debe ser impar y como H_i divide a X en dos, $m > 1$ se concluye $m \geq 2$.

En la matroide $N/(H_0 - y)$, los conjuntos $H_i \backslash (H_0 - y)$ tienen rango uno y son conjuntos cerrados ya que son hiperplanos. Como $R(H_0 - y) = R(N) - 2$, entonces $1 < R(N/(H_0 - y))$ y por definición, si $I \in I(N/(H_0 - y))$, entonces $I \cup (H_0 - y) \in I(N)$, de donde $R(I) \leq R(N) - R(H_0 - y) = 2$. Se concluye que $R(N/(H_0 - y)) = 2$. Como todo $H_i \backslash (H_0 - y)$ es un conjunto cerrado, la matroide $R(N/(H_0 - y))$ tiene por lo menos cuatro conjuntos cerrados, siendo estos $F_1, F_2, \ldots, F_{m+1}$ de donde $N/(H_0 - y)|\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, con $f_i \in F_i$, es isomorfo a $U_{2,4}$, pero como N es un menor excluido, N es isomorfo a $U_{2,4}$.

RECOVERED FILE NOT FINAL VERSION CONTAIN MISTAKES

3.2. Los Menores excluidos de $GF(3)$

Al igual que en el caso $GF(2)$, antes de mostrar cuáles son los menores excluidos de $GF(3)$, se enunciarán algunas proposiciones, que permiten efectuar el análisis para la demostración del teorema 3.7.
El método usado en la demostración del teorema 3.7, es el mismo método que usan Geelen, Gereds y Kapoor [4] en la caracterización de los menores excluidos de $GF(4)$.

Proposición 3.4 Si M es una matroide no representable en $GF(3)$, entonces existe una matroide M' para la cual existen a y b con las siguientes propiedades:

1. $E(M) = E(M')$.
2. $M\backslash\{a\} = M'\backslash\{a\}$, $M\backslash\{b\} = M'\backslash\{b\}$ y $M\backslash\{a,b\} = M'\backslash\{a,b\}$.
3. $\{a,b\}$ no es un circuito de M, ni de M'.
4. M' es representable en $GF(3)$.

Proposición 3.5 Si M y M' son un pareja de matroides que cumplen los numerales de la proposición anterior. Entonces, M no es representable en $GF(3)$.

Proposición 3.6 Si M y M' son un pareja de matroides que cumplen los numerales de la Proposición 3.4 y M es un menor excluido. Entonces $R(M) = R(M') = 3$ y existe $Z \subset E(M)$ que es una base de M o de M' y un circuito e hiperplano de la otra matroide.

Teorema 3.7 Los menores excluidos en $GF(3)$ son $U_{2,5}$, $U_{3,5}$, F_7 y F_7^*.
Demostración
Sea N un menor excluido de de $GF(3)$ distinto de $U_{2,5}$, $U_{3,5}$, F_7 o F_7^*. Por la Proposición 3.4, existen elementos a, b en $E(N)$ y una matroide M tal que $N\backslash\{a\} = M\backslash\{a\}$, $N\backslash\{a\} = M\backslash\{b\}$, $N\backslash\{a,b\} = M\backslash\{a,b\}$ y M es representable en $GF(3)$. De la Proposición 3.5, la pareja (N, M) es una pareja mínima que cumple con estas propiedades, todos las parejas (N', M'), donde $N' \subsetneq N$ y $M' \subsetneq M$, N' y M' son representables en $GF(3)$. Por la Proposición 3.6, existe un conjunto $Z \subseteq E(N)$ tal que Z es base de M o N y un circuito e hiperplano de la otra matroide. Una matroide se obtiene de la otra, al relajar el hiperplano Z, Z es un independiente en una y en la otra no, y $R(N) = R(M) = 3$.
Sean $P \in \{N, M\}$ la matroide tal que Z es un circuito de P y $Z = \{a, b, z\}$ y P' la matroide que se obtiene al relajar Z. Al ser P de rango 3, entonces $E(P)$ tiene por lo menos 4 elementos. Deben existir bases B_1, B_2, B_3 tales que $a, b \in B_1$, $a, z \in B_2$ y $z, b \in B_3$, si $E(P)$ tuviera sólo 4 elementos, $B(P) = \{\{a,b,c\}, \{a,z,c\}, \{z,b,c\}, \}$ y $P' = U_{2,4}$, pero P es representable por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y $U_{2,4}$ es representable en $GF(3)$, por lo que $E(P) \geq 5$.
Si $\{a, b, z\}$ es el único circuito de tres elementos de P, entonces $P' = U_{3,5} = N$, esto contradice la escogencia de N, en P existe un circuito C que contiene a $\{c, d\}$ y de tamaño tres cuya intersección con Z es distinta de vacío. Supongamos $C \cap Z = \{z\}$ y por la Proposición 1.7 este sería $\{c, d, z\}$. Si $\{c, d, a\}$ fuera circuito, por la proposición 1.7, se tiene que $\{c, b, z\}$, $\{c, a, z\}$, $\{d, b, z\}$ y $\{d, a, z\}$ serían circuito, esto es $P = U_{2,5}$ lo cual contradice la escogencia de P. Por el momento los únicos circuitos son $\{c, d, z\}$ y $\{a, b, z\}$; si $E(P) = 5$, entonces P con sus únicos dos circuitos es representable por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y P' es representable por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto contradice la escogencia de N, N es P o es P'. De donde $E(P) \geq 6$.
$\{a, b, z, d, c, e\} \subseteq E(P)$. Si e no pertenece a ningún circuito de tres elementos entonces $P|\{a, b, c, d, e\} = U_{3,5}$, que contradice la elección de N. Existe por lo menos un circuito C de tres elementos que contiene a $\{e\}$, si $z \in C$, en P el conjunto $\{b, e, z\}$ es circuito o el conjunto $\{c, e, z\}$ es circuito. Si $\{b, e, z\}$ es circuito, entonces por la Proposición 1.7 $\{b, e, z\}$ es un circuito, pero se tendrá que si $E(P) = 6$, P y P' son representables por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

respectivamente, de donde $E(P) \geq 7$, $\{a, b, z, d, c, e, f\} \subseteq E(P)$, si f no pertenece a ningún circuito de tres elementos, con $P|\{a, b, z, d, c, f\}$ se hace el mismo análisis que con $P|\{a, b, z, d, c, e\}$ y se tiene que existe un circuito C' de tres elementos el cual contiene a $\{f\}$, si $z \in C'$, entonces $C' = \{d, f, z\}$ o $C' = \{c, f, z\}$, pero si $E(P) = 7$, P y P' son representables por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

RECOVERED FILE NOT FINAL VERSION CONTAIN MISTAKES

respectivamente. Por lo que $E(P) \geq 8$,siendo g el nuevo elemento, al repetir el procedimiento con $P|\{a,b,z,d,c,g\}$ se tiene que g está en por lo menos un circuito de tres elementos, pero en este circuito no puede estar z, ya que de estarlo, por la Proposición 1.7 $P|\{a,b,z,e,g\} = U_{2,5}$, ya que todos sus subconjuntos de tres elementos son circuitos, el otro caso es $P|\{g,z,d,c,f\}$.
Hasta aquí, se ha mostrado que existe un elemento g que está en algún circuito de tres elementos y z no está en dicho circuito. Dado que existe ese elemento, se puede asumir que, cuando se toma un elemento e tal que existe un circuito C de tres elementos y $z \notin C$. Entonces $E(P) \geq 6$, $C \notin \{\{e,c,d\},\{a,e,b\}\}$, de lo contrario existiría el circuito de tres elementos que contiene a z y a e; de donde se puede asumir $C = \{a,e,c\}$, de este modo $P'|\{a,b,e,d,z\} = U_{3,5}$, lo cual contradice la escogencia de N, entonces existe otro circuito de tres elementos en P que contiene a e y no contiene a z ni a c, debido a la restricción, si este circuito fuese $\{a,e,d\}$, por la Proposición 1.7 se tendría que $\{a,d,c\}$ es un circuito, ya se mostró que esto implica que P tiene un menor isomorfo a $U_{2,5}$; se concluye que los circuitos de P de tres elementos son $\{a,b,z\}$, $\{a,e,c\}$, $\{d,c,z\}$ y $\{d,b,e\}$, P es la matroide generada por el grafo K_4, por la Proposición 2.4 esta matroide es representable, pero P' es representable por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

esto contradice la elección de N, $E(P) \geq 7$.
$\{a,b,c,d,e,f,z\} \subseteq E(P)$. Si f no está en ningún circuito de tres elementos, entonces $P'|\{a,b,e,f,z\} = U_{3,5}$ esto contradice la elección de N, existen circuitos de tres elementos a los cuales pertenece f. Al analizar $P|\{a,b,c,d,f,z\}$ tal y como se analizó $P|\{a,b,c,d,e,z\}$, se obtiene que entre $\{a,f,d\}$ y $\{b,f,d\}$ hay un circuito y entre $\{a,f,c\}$ y $\{b,f,c\}$ hay otro circuito. Si los circuitos son $\{b,f,c\}$ y $\{a,f,d\}$ por la proposición 1.7 como $\{b,e,c\}$ y $\{a,e,d\}$ son circuitos, entonces $\{e,f,c\}$ y $\{e,f,d\}$ también serán circuitos y al aplicar de nuevo la proposición 1.7, se tiene que $\{e,d,c\}$ es circuito pero ya se había visto que esto no puede pasar. Si los circuitos son $\{a,f,c\}$ y $\{a,f,d\}$, por la proposición 1.7 se tiene que $\{a,d,c\}$ también es circuito pero se había visto que esto no podía pasar. Se concluye que los circuitos son $\{a,f,c\}$ y $\{b,f,d\}$.
El conjunto $\{e,f,z\}$ es circuito o independiente. Si fuera independiente, entonces $P'|\{a,b,f,e,z\} = U_{3,5}$ que contradice la elección de N, de esto se concluye que $\{e,f,z\}$ es circuito, pero se tendrá que $P|\{a,b,c,d,e,f,z\} = F_7$ lo cual contradice la elección de N.
Se concluye que los menores excluidos en $GF(3)$ son $U_{2,5}$, $U_{3,5}$, F_7 y F_7^*.

4. Tabla de Símbolos

$E(m)$	Conjunto soporte de la matroide M.
$I(M)$	Conjunto de independientes de la matroide M.
$B(M)$	Conjunto de las bases de la matroide M.
$C(M)$	Conjutno de los circuitos de la matroide M.
$R(X)$	Rango de el subconjunto $X \subseteq E(M)$.
$R(M)$	Rango de el conjunto $E(M)$.
$cl(X)$	Clausura de el subconjunto $X \subseteq E(M)$.
M^*	Matroide dual de la matroide M.
$M\|X$	Restricción e M a X.
$M\backslash X$	Eliminación de X de M.
M/X	Contracción de X por M.
$M \oplus N$	Suma directa de M y N.
$M(A)$	Matroide vectorial generada por la matriz A.
$M(G)$	Matroide gráfica generada por el grafo G.
$U_{r,n}$	Matroide uniforme de rango r y tamaño n.
F_7	Matroide de Fano.
F_7^-	Matroide no-Fano.
$GF(K)$	Campo finito de k elementos.

RECOVERED FILE
NOT FINAL VERSION
CONTAIN MISTAKES

5. Referencias bibliográficas

- **[1]** Matroid Theory, James Oxley, OGTM OXFORD UNIVERSITY PRESS (1992).

- **[2]** Aspectos combinatorios de las subdivisiones matroidales, Edgar Rincón, tesis de maestria Universidad de los Andes, Julio 2007.

- **[3]** Notas de clase: Matroid Theory, San Francisco State University y Universidad de los Andes 2007, Federico Ardila, spring 2007.

- **[4]** The excluded minors for $GF(4)-$representable matroids, J. F. Geelen, A. M. H. Gerards y A. Kapoor, Journal of Combinatorial Theory, series B 79, 247-299 (2000).

- **[5]** A homotopy theorem for matroids, I, II, W. T. Tutte Trans.Amer. Math. Soc. 88, 144-174 (1958).

- **[6]** Matroid representation over $GF(3)$, P. D. Seymour, J. Combin. Theory Ser. B 23, 159-173 (1979).

- **[7]** On Reid's characterization of the ternary matroids, R. E. Bixby, J. Combin. Theory Ser. B26, 174-204 (1979).

RECOVERED FILE
NOT FINAL VERSION
CONTAIN MISTAKES