Curso de Teoria de Numeros Enero 2008

Miguel Moreno

11 de junio de 2009

1. Problemas

1.1. Divisibilidad

1. Sean a, b y c enteros tales que $a \mid b$ y $a \mid c$ entonces $a \mid bx + cy$, $\forall x, y \epsilon \mathbb{Z}$
2. Sean $m \neq 0$ y k enteros, entonces $m! \mid \sum_{i=1}^{m}(k+i)$
3. $2 \mid n^2 - n$
4. $6 \mid n^3 - n$
5. Si n es un entero impar entonces $8 \mid n^2 - 1$
6. Sea $n > 1$ entonces $(n-1)^2 \mid (n^k - 1) \iff (n-1) \mid k$
7. $30 \mid n^5 - n$
8. $(a^n - 1) \mid (a^m - 1) \iff n \mid m$
9. Sean n, r y s enteros positivos tales que $n = rs$ entonces $(r!)^s \mid n!$
10. $m!n! \mid (m+n-1)!$
11. Sea f_n el n-ésimo numero de la susecion de fibonacci, entonces $f_n \mid f_m \iff n \mid m$
12. $(n!)^2 \mid (2n)!$
13. $4 \nmid n^2 + 2$
14. Sean x y y impares entonces $4 \nmid x^2 + y^2$
15. Demostrar que los numeros de la forma $6k+5$ es ta,bien de la forma $3k'-1$
16. Demostrar que los numeros de la forma $(5k+1)^2$ es de la forma $5k'+1$

1.2. MCD y mcm

1. El MCD, (a, b), es el menor entero positivo de la forma $ax + by$ donde $x, y \epsilon \mathbb{Z}$
2. Si $a = bq + r$ entonces $(a, b) = (b, r)$
3. $(b, c) = 1$ y $r \mid b$ entonces $r, c = 1$
4. Si $a \mid c$, $b \mid c$ y $(a, b) = 1$ entonces $ab \mid c$
5. $(ka, kb) = k(a, b)$
6. $[a, b](a, b) = ab$
7. $(f_{n+3}, f_n) = 1$ o $(f_{n+3}, f_n) = 2$
8. Si $m = qn + r$ entonces $(f_n, f_m) = (f_r, f_n)$
9. $(f_n, f_m) = f_{(n,m)}$
10. Si $(a, 4) = 2$ y $(b, 4) = 2$ entonces $(a + b, 4) = 4$
11. $(a, b) = c$ entonces $(a^2, b^2) = c^2$
12. (b, c) entonces $(a, bc) = (a, b)(a, c)$
13. $n \neq m$ entonces $(a^{2^n} + 1, a^{2^m} + 1) = 1$ si a es par o $(a^{2^n} + 1, a^{2^m} + 1) = 2$ si a es impar
14. $(a, b) = (a + b, [a, b])$
15. $\frac{|k|}{(\frac{k}{a}, \frac{k}{b})} = [a, b]$
16. $[ka, kb] =\mid k \mid [a, b]$
17. $[\frac{a}{d}, \frac{b}{d}] = \frac{[a,b]}{d}$
18. Hallar enteros a y b tales que $a + b = 216$ y $[a, b] = 480$
19. $(a, b) = [a, b]$ entonces $a = b$
20. $(n, n + 1)$ y $[n, n + 1]$
21. Hallar todos los numeros x y y enteros positivos tales que $x + y = 100$ y $(x, y) = 3$
22. Hallar todos los numeros x y y enteros positivos tales que $x + y = 100$ y $(x, y) = 5$
23. Demostrar que existen numeros x y y enteros positivos $x+y = s$ y $(x, y) = g$ si y solo si $g \mid s$

24. Demostrar que existen numeros x y y enteros positivos $[x, y] = l$ y $(x, y) = g$ si y solo si $g \mid l$
25. Demostrar que existen numeros x y y enteros positivos $(x, y) = g$ y $xy = b$ si y solo si $g^2 \mid b$
26. Dados los enteros a, b, c, d, m, n, u y v tales que $ad - bc = \pm 1$

1.3. Primos

1. Existen infinitos primos.
2. Existen infinitos primos de la forma $4k + 3$, $6k + 5$ (Dirichlet $(a, b) = 1$ entonces existen infinitos primos de la forma $a + kb$)
3. Si n es compuesto, entonces existe un primo tal que $p \mid n$ y $p \leq \sqrt{n}$
4. Demostrar que los unicos primos triples son $3, 5, 7$
5. $p \geq q \geq 5$ p, q primos, entonces $24 \mid p^2 - q^2$
6. $p, q \neq 2, 3$ p, q primos, $p - q = 2^k$ entonces $3 \mid p + q$
7. Demostrar que los numeros de las formas $3k+2$ y $4k+3$ tienen un divisor comun de la misma forma.
8. Si $2^n + 1$ es primo, entonces $n = 2^k$
9. Si $2^n - 1$ es primo, entonces n es primo.
10. Hallar todos los enteros positivos n tales que $(\sum_{i=1}^{n} i) \mid n!$
11. $(a + b, \frac{a^p+b^p}{a+b}) = 1$ o $(a + b, \frac{a^p+b^p}{a+b}) = p$ para p primo impar.
12. $a, b > 2$ entonces $2^b - 1 \nmid 2^a + 1$
13. g y l enteros positivos tales que $g|l$, demostrar que el numero de parejas que satisfacen $(x, y) = g$ y $[x, y] = l$ es 2^k donde k es el numero de factores primos distintos de l/g
14. Demostrar que no existen $a, b, n > 1$ tales que $(a^n - b^n) \mid (a^n + b^n)$
15. Demostrar base dos.
16. Demostrar que todo entero se puede escribir como $\sum_{i=0} b_i 3^i$ donde b_i toma valores de $-1, 0, 1$
17. Demostrar que ningun polinomio $f(x)$ con coeficientes enteros puede representar un primo para todo entero positivo x.
18. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ no es entero para $n > 1$
19. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1}$ no es entero.