Curso de algebra Enero 2007

Miguel Moreno

26 de enero de 2009

1. Desigualdades

1.1. Desigualdad Triangular

Para cualesquiera dos numeros x , y se cumple

$$|x+y| \leq |x| + |y| \tag{1}$$

Demostración:

La funcion valor absoluto cumple

$$-|x| \leq x \leq |x| \tag{2}$$

$$-|y| \leq y \leq |y| \tag{3}$$

Sumando (2) y (3)

$$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y| \tag{4}$$

Como $|a| \leq b \Longleftrightarrow -b \leq a \leq b$, con esto y (4) se tiene el resultado, la igualdad se cumple si y solo si x y y tienen igual signo.

$\blacksquare$

Ejemplo:

1. Para reales x, y, z provar
   $x^2 + y^2 + z^2 \geq |xy + yz + zx|$

   Solucion:

   Como todos los cuadrados son positivos

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 \geq 0$$

y

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$$

de estas dos desigualdades y expandiendo se tiene

$$2x^2+2y^2+2z^2-2|xy|-2|yz|-2|zx| \geq 0$$

$$x^2+y^2+z^2 \geq |xy|+|yz|+|zx|$$

usando la desigualdad triangular

$$x^2+y^2+z^2 \geq |xy|+|yz|+|zx| \geq |xy+yz+zx|$$

1.2. Reordenamiendo

Para dos conjuntos cualesquiera de n numeros reales ordenados en forma creciente, $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$, toda permutacion $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ cumple

$$a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n \leq a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \cdots + a'_n b_n \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \quad (5)$$

Demostración:

Primero se mostrara para conjuntos de dos elementos. Sean a, b, c y d numeros reales tales que $a \leq b$ y $c \leq d$, se cumple

$$ad+bc \leq ac+bd \quad (6)$$

Se tiene

$$0 \leq d-c \quad (7)$$

Multipliacando por $d-c$ en $a \leq b$ se obtiene

$$a(d-c) \leq b(d-c) \quad (8)$$

$$ad-ac \leq bd-bc \quad (9)$$

$$ad+bc \leq bd+ac \quad (10)$$

Para el caso de n, suponga los conjuntos $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ y la permutacion $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Si existen i y j tales que $i<j$ y $a'_j < a'_i$, entonces por el caso de dos elementos se sabe

$$a'_i b_i + a'_j b_j \leq a'_j b_i + a'_i + b_j \quad (11)$$

Por lo cual la suma $a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \cdots + a'_n b_n$ es maxima si y solo si $a'_1 \leq a'_2 \leq \cdots \leq a'_n$. La igualdad se tiene s y solo si la permutacion esta en el mismo orden que los a_i.

■

Ejemplos:

1. Para cualquier permutacion $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se tiene:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a'_1 a_1 + a'_2 a_2 + \cdots + a'_n a_n$$

Solucion:

Sea $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ el conjunto $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ordenado.
Usando la desigualdad de reordenamiento con los numeros
$b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$se tiene

$$b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 \geq b'_1 b_1 + b'_2 b_2 + \cdots + b'_n b_n$$

donde $b'_1, b'_2, \ldots, b'_n$ es cualquier permutacion de $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Como $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son los numeros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ordenados se tiene

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$$

y $b'_1, b'_2, \ldots, b'_n$ es tambien permutacion de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de donde

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a'_1 a_1 + a'_2 a_2 + \cdots + a'_n a_n$$

2. Para cualquier permutacion $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se tiene:

$$\frac{a'_1}{a_1} + \frac{a'_2}{a_2} + \cdots + \frac{a'_n}{a_n} \geq n$$

Solucion:

Sea $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ el conjunto $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ ordenado y sea $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$ el conjunto $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ordenado. De esta forma $b_i = c_i$ para todo i
Usando la desigualdad de reordenamiento

$$c'_1 b_1 + c'_2 b_2 + \cdots + c'_n b_n \geq c_n b_1 + c_{n-1} b c_2 + \cdots + c_1 b_n \geq 1 + 1 + \cdots + 1$$

Donde $c'_1 \leq c'_2 \leq \cdots \leq c'_n$ es una permutacion de $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$, que es lo mismo a ser una permutacion de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Entonces

$$a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \cdots + a'_n b_n \geq n$$

$$\frac{a'_1}{a_1} + \frac{a'_2}{a_2} + \cdots + \frac{a'_n}{a_n} \geq n$$

1.3. Tchebychev

Para dos conjuntos cualesquiera de n numeros reales ordenados, $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ se cumple

$$(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n})(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}) \leq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n} \tag{12}$$

Demostración:

Notese que

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \tag{13}$$

es

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)(a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1) \cdots (a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1}) \tag{14}$$

De acuerdo a la desigualdad de reordenamiento cada uno de los terminos de la multiplicacion es menor o igual que $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$, por lo cual

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \leq n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) \tag{15}$$

Dividiendo por n^2

$$(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n})(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}) \leq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n} \tag{16}$$

La igualdad se tiene cuando una de las dos sucesiones es constante.

$\blacksquare$

Ejemplos:

1. Demostrar que para un numero finito de suceciones crecientes (a_i, b_i, c_i, $\dots$) de n se cumple

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i) \cdots \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_ib_ic_i \cdots$$

Solucion:

Notese que para las suceciones a_i y b_i se cumple

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

Pero la sucesion $\alpha_i = a_ib_i$ es tambien creciente y de igual forma se obtiene

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_ic_i$$

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i$$

Repitiendo este procedimiento con todas las sucesiones se llega al resultado.

2. Sea a_i una sucesion creciente. Demostrar

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i a_i$$

Solucion:

Como la sucesion de los numeros naturales es creciente, al usar la desigualdad de Tchebychev

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i a_i$$

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i a_i$$

De donde se tiene el resultado.

1.4. Cauchy-Schwarz

Para dos conjuntos cualesquiera de n numeros reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ se cumple

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \tag{17}$$

Demostración:

Notese que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 + \sum_{i\neq j}^{n} a_i^2 b_j^2 \tag{18}$$

y

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 + 2\sum_{i\neq j}^{n} a_i b_i a_j b_j \tag{19}$$

entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 + \sum_{i\neq j}^{n} a_i^2 b_j^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 - 2\sum_{i\neq j}^{n} a_i b_i a_j b_j \tag{20}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{i\neq j}^{n} a_i^2 b_j^2 - 2\sum_{i\neq j}^{n} a_i b_i a_j b_j \qquad (21)$$

tomando los numeros $a_i b_j$ para $i \neq j$, por reordenamiento se tiene

$$\sum_{i\neq j}^{n} a_i^2 b_j^2 \geq 2\sum_{i\neq j}^{n} a_i b_i a_j b_j \qquad (22)$$

con esto y (21)

$$\sum_{i\neq j}^{n} a_i^2 b_j^2 - 2\sum_{i\neq j}^{n} a_i b_i a_j b_j \geq 0 \qquad (23)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \qquad (24)$$

La igualdad se cumple si y solo si $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

■

Ejemplos:

1. Demostrar

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

   Solucion:

   Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$$

$$\left(n\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n^{\frac{1}{2}}}$$

   El resultado se sigue.

2. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numers reales. Demostrar

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_n a_1$$

Solucion:

Tomese la sucesion $b_1 = a_2$, $b_2 = a_3$, $\ldots$, $b_n = a_1$ por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2 \geq (a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1)^2$$

y el resultado se tiene.

1.5. MA-MG-MH

Sean a_1, a_2,$\ldots$, a_n reales positivos.

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq (a_1a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \tag{25}$$

Esta desigualdad se conoce como la desigualdad Media Aritmetica-Media Geometrica-Media Armonica.

Demostración:

Se empezara por mostrar MA-MG

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq (a_1a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}} \tag{26}$$

Para la demostracion se usara el metodo de induccion.
Como $(x + y)^2 \geq 0$, entonces $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, el resultado se tienen para $n = 2$. Supongase que existe un entero k, tal que para cualesquiera k reales positivos se cumple MA-MG. Para los numeros a_1, a_2,$\ldots$, a_k y a_{k+1}, a_{k+2},$\ldots$, a_{2k} tenemos

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} \geq (a_1a_2 \ldots a_k)^{\frac{1}{k}} \tag{27}$$

$$\frac{a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}}{k} \geq (a_{k+1}a_{k+2} \ldots a_{2k})^{\frac{1}{k}} \tag{28}$$

Como se cumple para $n = 2$

$$\frac{(a_1a_2 \ldots a_k)^{\frac{1}{k}} + (a_{k+1}a_{k+2} \ldots a_{2k})^{\frac{1}{k}}}{2} \geq \sqrt{(a_1a_2 \ldots a_k)^{\frac{1}{k}}(a_{k+1}a_{k+2} \ldots a_{2k})^{\frac{1}{k}}} \tag{29}$$

Sumando (27) con (28)

$$\frac{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} + \frac{a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}}{k}}{2} \geq \frac{(a_1a_2 \ldots a_k)^{\frac{1}{k}} + (a_{k+1}a_{k+2} \ldots a_{2k})^{\frac{1}{k}}}{2} \tag{30}$$

De (29) y (30)

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2k}}{2k} \geq (a_1 a_2 \ldots a_{2k})^{\frac{1}{2k}} \tag{31}$$

Como se cumple para 2, se cumple para todo n potencia de 2.
Se demostrara que si se cumple para k se cumple para $k-1$. Tomando los reales positivos a_1, a_2,..., a_{k-1}, $(a_1 a_2 \ldots a_{k-1})^{\frac{1}{k-1}}$, haciendo $g = (a_1 a_2 \ldots a_{k-1})^{\frac{1}{k-1}}$, se tiene

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + g}{k} \geq (a_1 a_2 \ldots a_{k-1} g)^{\frac{1}{k}} \tag{32}$$

Despejando

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1} \geq (a_1 a_2 \ldots a_{k-1})^{\frac{1}{k-1}} \tag{33}$$

De donde, si se cumple para algun k entonces se cumple para todo numero menor a k.
En general como MA-MG se cumple para toda potencia de dos, se cumple para todo entero n.
Ahora para demostrar MG-MH, suponga los numeros reales positivos, al aplicarle MA-MG a estos numeros

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \left(\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\ldots\frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{34}$$

Despejando

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \tag{35}$$

La igualdad se tiene para $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

■

Ejemplos:

1. Sean a, b, c reales positivos. Demostrar

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Solucion:

Por MA-MG se tienen las siguientes desigualdades

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$
$$\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$$
$$\frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}$$

al multiplicarlos

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} \geq \sqrt{a^2b^2c^2}$$

de donde se obtiene el resultado.

2. Sea x, y, z reales positivos se tiene

$$\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \geq x + y + z$$

Solucion:

Por MA-MG se tienen las siguientes desigualdades

$$\frac{\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}}{2} \geq \sqrt{\frac{yz}{x}\frac{zx}{y}}$$
$$\frac{\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}}{2} \geq \sqrt{\frac{zx}{y}\frac{xy}{z}}$$
$$\frac{\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}}{2} \geq \sqrt{\frac{xy}{z}\frac{yz}{x}}$$

sumandolas

$$\frac{2\frac{yz}{x} + 2\frac{zx}{y} + 2\frac{xy}{z}}{2} \geq \sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2 + \sqrt{z}^2$$

y el resultado se tiene.

3. Si a, b, $c > 0$ se cumple

$$\frac{9}{a+b+c} \leq 2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Solucion:

Por MA-MH se tiene

$$\frac{3}{a+b+b+c+c+a} \leq \frac{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}}{3}$$
$$\frac{9}{a+b+c} \leq 2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$$

De igual manera usando MA-MH

$$\frac{2}{a+b} \leq \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$$
$$\frac{2}{b+c} \leq \frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}$$
$$\frac{2}{c+a} \leq \frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}{2}$$

al sumarlas se obtiene la desigualdad de la derecha.

2. Polinomios

2.1. Binomio de Newton

Para cualquier enteron positivo n y cualesquiera reales x, y

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + y^n \tag{36}$$

Demostración:

Para la demostracion se usara

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \tag{37}$$

En la demostracion se usara el metodo de induccion. Para $n = 1$ el teorema es cierto. Supongamos para algun en tero positivo k se cumle

$$(x+y)^k = x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}y + \binom{k}{2}x^{k-2}y^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}xy^{k-1} + y^k \tag{38}$$

entonces

$$(x+y)^{k+1} = (x+y)(x+y)^k \tag{39}$$

$$(x+y)^{k+1} = (x+y)(x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}y + \binom{k}{2}x^{k-2}y^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}xy^{k-1} + y^k) \tag{40}$$

$$\begin{aligned}(x+y)^{k+1} \quad = \quad & x^{k+1} + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right)x^n y + \left(\binom{n}{2} + \binom{n}{3}\right)x^{n-1}y^2 + \\ & \cdots + \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}\right)x^{n-k+1}y^k + \cdots + y^{k+1}\end{aligned} \tag{41}$$

usando la identidad mencionada al principio

$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + \binom{n+1}{1}x^n y + \binom{n+1}{2}x^{n-1}y^2 + \cdots + \binom{n+1}{n}xy^n + y^{n+1} \tag{42}$$

■

2.2. Raíces Polinomios Cuadráticos

Todo polinomio cuadrático es de la forma $ax^2 + bx + c$ con a, b, c numeros reales y $a \neq 0$. Se dice que un numero α es raiz de el polinomio cuadrático $P(x)$ si y solo si $P(\alpha) = 0$, por tanto todas las soluciones de la ecuacion $ax^2 + bx + c = 0$ son raices del polinomio.
Las raices de $P(x) = ax^2 + bx + c$ son

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{43}$$

Demostración:

La ecuaciones

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{44}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \tag{45}$$

tienen iguales soluciones, al sumar y restar $\frac{b^2}{4a^2}$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} = 0 \tag{46}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \tag{47}$$

$$\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0 \tag{48}$$

el resultado se sigue.

■

De este resultado se deduce que si $b^2 - 4ac < 0$ el polinomio no tiene raices reales, con $b^2 - 4ac = 0$ el polinomio tiene una unica raiz real y para $b^2 - 4ac > 0$ el polinomio tendra dos raices reales.

2.3. Teorema del residuo

Para todo polinomio no nulo $P(x)$, al dividirlo por $x - a$ deja como residuo un real $r = P(a)$

Demostración:

Como

$$P(x) = Q(x)(x - a) + r \tag{49}$$

Donde r es una constante real y $Q(x)$ es un polinomio en x de menor grado que $P(x)$. Entonces

$$P(a) = Q(a)(a - a) + r = Q(a)(0) + r = r \tag{50}$$

■

2.4. Teorema del factor

$x - a$ es factor de $P(x)$ si y solo si $P(a) = 0$

Demostración:

Si $x - a$ es factor de $P(x)$ se tiene

$$P(x) = Q(x)(x - a) \tag{51}$$

De donde

$$r = 0 = P(a) \tag{52}$$

Si $P(a) = 0$, entonces por el teorema del residuo $P(a) = r = 0$.

■

Como concecuencia un polonomio tiene a lo mas n raices.

2.5. Teorema de identidad

Si dos polinomios de grado menor o igual a n coinciden en $n + 1$ puntos distintos entonces los polinomios son iguales.

Demostración:

Suponga los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, con grados menores o iguales a n, que coinciden en $n + 1$ puntos distintos. Sea

$$R(x) = P(x) - Q(x) \tag{53}$$

De donde el grado de $R(x)$ es menor o igual a n, por lo cual tiene a lo mas n raices. Como $P(x)$ y $Q(x)$ coinciden en a lo menos $n+1$ puntos, $R(x)$ tendra a lo menos $n+1$ raices, por consiguiente $R(x) = 0$ y $P(x) = Q(x)$.

■

2.6. Relaciones de vieta

Sea $P(x) = x^n + a_{n-1}x^n - 1 + \cdots + a_1x + a_0$ un polinomio con raices α_1, α_2, ..., α_n. Entonces

$$-a_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tag{54}$$

$$a_{n-2} = \sum_{0<i\leq j\leq n} \alpha_i\alpha_j \tag{55}$$

$$\vdots$$

$$(-1)^n a_0 = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \tag{56}$$

Demostración:

Se usara el metodo de induccion. Para $n = 1$ se tiene $P(x) = x - \alpha_1$ y $-a_{n-1} = \alpha_1$, el teorema es cierto. suponga se cumple para todo polinomio de grado k. Suponga el polinomio $P(x) = x^{k+1} + a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ con raices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}$. Por el teorema del factor

$$P(x) = Q(x)(x - \alpha_{k+1}) \tag{57}$$

Pero

$$Q(x) = x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \tag{58}$$

El cual tiene raices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ y por hipotesis de induccion

$$-b_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \tag{59}$$

$$b_{k-2} = \sum_{0<i\leq j\leq k} \alpha_i \alpha_j \tag{60}$$

$$\vdots$$

$$(-1)^k b_0 = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \tag{61}$$

De donde

$$P(x) = x^{k+1} + (b_{k-1} - \alpha_{k+1})x^k + \cdots + (b_0 - b_1\alpha_{k+1})x - b_0\alpha_{k+1} \tag{62}$$

Por el teorema de la identidad

$$a_k = b_{k-1} - \alpha_{k+1} = -\sum_{i=1}^{k} \alpha_i - \alpha_{k+1} = -\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \tag{63}$$

$$a_{k-1} = b_{k-2} - b_{k-1}\alpha_{k+1} = \sum_{0<i\leq j\leq k} \alpha_i\alpha_j + \alpha_{k+1}\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \sum_{0<i\leq j\leq k+1} \alpha_i\alpha_j \tag{64}$$

$$\vdots$$

$$a_0 = b_0\alpha_{k+1} = (-1)^{k+1}\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{k+1} \tag{65}$$

■

3. Funciones

3.1. Jensen

4. Problemas

4.1. Induccion

1. Hallar y demostrar

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2i - 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} i(3i - 1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i!)$$

$$(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9}) \cdots (1 - \frac{1}{n^2})$$

2. Mostrar para cualquier entero $n > 0$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$$

4.2. Binomio de Newton

Hallar y demostrar

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^n \binom{n}{i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \binom{n+i}{i} = \binom{n+m+1}{m}$$

4.3. Polinomios

1. Hallar todos los valores reales de x tal que el sistema

$$ab = x$$

$$a + b = x$$

tenga soluciones reales.

2. (Ing 1967) Sean α y β raices del polinomio $x^2 + px + 1$ y γ y δ raices del polinomio $x^2 + qx + 1$. Demostrar

$$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta) = q^2 - p^2$$

3. (Can 1970) Sea $P(x)$ un polinomio de coeficientes enteros tal que para a, b, c y d enteros distintos $P(a) = P(b) = P(c)P(d) = 5$. Demostrar que no existe un entero k tal que $P(k) = 8$.

4. Para que valores d $m$el polinomio $m^2x^2 + 2(m + 1)x + 4$ tiene una sola raiz.

5. Sea $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ donde n es mayor o igual a 2, un polinomio de coeficientes enteros. Demostrar que si $P(0)$ y $P(1)$ son numeros impares entonces $P(x)$ no tiene raices enteras.

6. Sean a y b dos raices del polinomio $P(x)$ de forma tal que existen dos polinomios $u(x)$ y $v(x)$,

$$P(x) = (x - a)u(x) = (x - b)v(x)$$

Demostrar que el resto de raices de $P(x)$ son soluciones de la ecuacion

$$u(x) - v(x) = 0$$

7. Existe algun polinomio $P(x)$ con coeficientes enteros tal que $P(1) = 2000$ y $P(2000) = 2001$.

8. (OMUS 1986) Las raices del polinomio $x^2 + ax + b + 1$ son enteros. Demostrar que $a^2 + b^2$ es un numero compuesto.

9. Sea $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros y $\frac{p}{q}$ una raiz racional del polinomio, con p y q enteros. Demostrar que a_0 es multiplo de p y a_n es multiplo de q.

10. (BIMO 1981) El polinomio $P(x)$ tiene grado n y satisface que $P(k) = \frac{1}{\binom{n+1}{k}}$ para $k = 0, 1, \ldots, n$. Encontrar $P(n + 1)$.

4.4. Reordenamiento

1. Si a, b, c son reales positivos, demostrar

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$$

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab$$

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

2. Si a_1, a_2, $\ldots$, a_n son reales positivos y $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ mostrar

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1}$$

3. (Desigualdad de Nesbitt) Sean a, b, c reales positivos, entonces

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

4. Sean a, b, c reales positivos con $a + b + c = 1$, demostrar

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq 5$$

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq \sqrt{21}$$

5. (IMO 1975) Considere 2 colecciones de numeros reales, $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ y $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$ con una permutacion $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Demostrar

$$(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2 \leq (x_1-z_1)^2+(x_2-z_2)^2+\cdots+(x_n-z_n)^2$$

6. (IMO 1978) Sean x_1, x_2, $\ldots$, x_n enteros positivos distintos, demostrar

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots + \frac{x_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

7. Sea $f(a, b, c, d) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2$ para $a < b < c < d$, demostar

$$f(a, c, b, d) > f(a, b, c, d) > f(a, b, d, c)$$

8. Suponga que $a > b > c > d$ y $a + d = b + c$. Demostrar

$$ad < bc$$

4.5. Cauchy-Schwarz

1. Sean α, β, a, b tales que $a^2 + b^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 1$. Demostrar
$$|a\alpha + b\beta| \leq 1$$

2. Para numeros $0 < a < b$. Demostrar
$$\sqrt{b^2 - a^2} + \sqrt{2ab - a^2} > b$$

3. Para x, y, z. Demostrar
$$x^2 + y^2 + z^2 \geq |xy + yz + zx|$$

4. Suponga a_1, a_2, $\ldots$, a_n un conjunto de numeros positivos, demostrar
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geq n^2$$
Mas general, demostrar para b_1, b_2, $\ldots$, b_n no negativos
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a_k}\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

5. Suponga x_1, $x_2 \ldots x_n > 0$. Demostrar
$$\frac{x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_n + x_1} \geq \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \cdots x_n)$$

6. Provar para reales positivos a, b, c
$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$$

7. (Sharp Calculator Competition 1995 [South Africa]) Para positivos s, b, α, β, provar
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{\alpha}\frac{16}{\beta} \geq \frac{64}{a + b + \alpha + \beta}$$

8. (Iran 1997) Sean x, y, z reales mayores que 1 tales que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Demostrar
$$\sqrt{x + y + z} \geq \sqrt{x - 1} + \sqrt{y - 1} + \sqrt{z - 1}$$

9. Sea $t = x + y + z$, $u = xy + yz + zx$, $v = xyz$. Siendo x, y y z no negativos demostrar
$$tu \geq 9v$$

10. (Rus 1997) Sea $P(x)$ un polinomio cuadratico con con ceoficientes no negativos. Demostrar que para cualesquiera reales x y y se tiene
$$(P(xy))^2 \leq P(x^2)P(y^2)$$

4.6. MA-MG-MH

4.7. Funciones

1. Hallar todas las funciones de reales en reales que cumplan

$$f(x) \leq x$$

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$

2. Sea f una funcion de naturales a naturales talque

$$f(1) = 0$$

$$f(2n) = 2f(n) + 1$$

$$f(2n+1) = 2f(n)$$

Hllar el menor n tal que $f(n) = 1994$

3. Hallar todas las funciones de reales en reale tales que

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y)$$

4. La funcion f de reales en reales cumple

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{x+y}$$

Para cada par de reales x, y tales que $x + y \neq 0$, existe un real a con $f(a) \neq 0$

5. Existe una funcion de reales en reales tal que

$$f(x^2) - (f(x))^2 \geq \frac{1}{4}$$

6. Las funciones f y g no son constantes y satisfacen

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$g(x+y) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$$

para cada par de numeros reales x, y. Encontrar los posibles valores de $f(0)$ y $g(0)$.

4.8. Ecuaciones

1. Encontrar las soluciones reales de la ecuacion
$$(\frac{3}{8})^x + (\frac{5}{8})^x = 1$$

2. Encontrar todos los valores de x para los cuales
$$x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$$

3. resolver el siguiente sistema de ecuaciones en los numeros reales
$$x^3 + 2x^2 + 2x = y$$
$$y^3 + 2y^2 + 2y = z$$
$$z^3 + 2z^2 + 2z = x$$

4. Encontrar las soluciones reales del siguiente sistema de ecuaciones
$$x + \frac{2}{x} = 2y$$
$$y + \frac{2}{y} = 2z$$
$$z + \frac{2}{z} = 2x$$

5. resolver en reales positivos el siguiente sistema
$$x + y + z = 9$$
$$4xyz = 27 + x^2y + y^2z + z^2x$$

6. Encontrar todas las soluciones reales de la ecuacion
$$(1-x_1)^2 + (x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1}-x_n)^2 + x_n^2 = \frac{1}{n+1}$$

7. Encontrar todos los numeros reales x para los cuales
$$\sqrt{1+\sqrt{x}} = x - 1$$

8. Encontrar todos los numeros reales x para los cuales
$$2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{x} - 1} = x + 1$$

9. Resolver el siguente sistema de ecuaciones
$$y^3 - 3x + 2 = 0$$
$$z^3 - 3y + 2 = 0$$
$$x^3 - 3z + 2 = 0$$